ministère Éducation nationale

EFE MPC 1

SESSION 2014

CAPLP
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

SECTION MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE-CHIMIE

ÉPREUVE ÉCRITE SUR DOSSIER DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Le premier exercice est un vrai faux avec justification.

Le deuxième exercice est de nature pédagogique et porte sur l'analyse d'un document élève, niveau terminale Bac Pro, groupement A .

Le troisième exercice est une série de problématiques autour de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Pour tout réel b, l'équation $\mathrm{e}^{x} - (2x+b) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
2. Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I alors FG est une primitive de fg sur l'intervalle I.
3. Si A et B sont deux événements tels que $P_{\bar{B}}(A) = 0{,}4$, $P_B(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}2$ alors $P(A \cup B) = 0{,}52$.
4. Il est financièrement toujours plus intéressant de demander une réduction de 10% du prix d'une marchandise que de demander une augmentation de 10% de la quantité de marchandise.
5. Dans le plan complexe, on considère les points $A(2-i)$, $M(3+2i)$ et $N(3i)$. Le triangle AMN est isocèle rectangle.
6. Il n'existe pas de série statistique telle que la médiane soit strictement inférieure à la moyenne.
7. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
8. La fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} \times \mid \cos(\pi x) \mid$ est dérivable en $\dfrac{1}{2}$.

Tournez la page S.V.P.

C

Exercice 2

Cet exercice de type pédagogique est construit autour d'un exercice proposé en Terminale Bac Pro - groupement A sur la thématique « Construire et aménager sa maison ».

Il nécessite les annexes suivantes fournies en fin de problème :

Annexe 1 : Document élève
Annexe 2 : Extrait du Bulletin officiel spécial numéro 2 du 19 février 2009
Annexe 3 : Grille nationale d'évaluation en mathématiques et en sciences physiques et chimiques

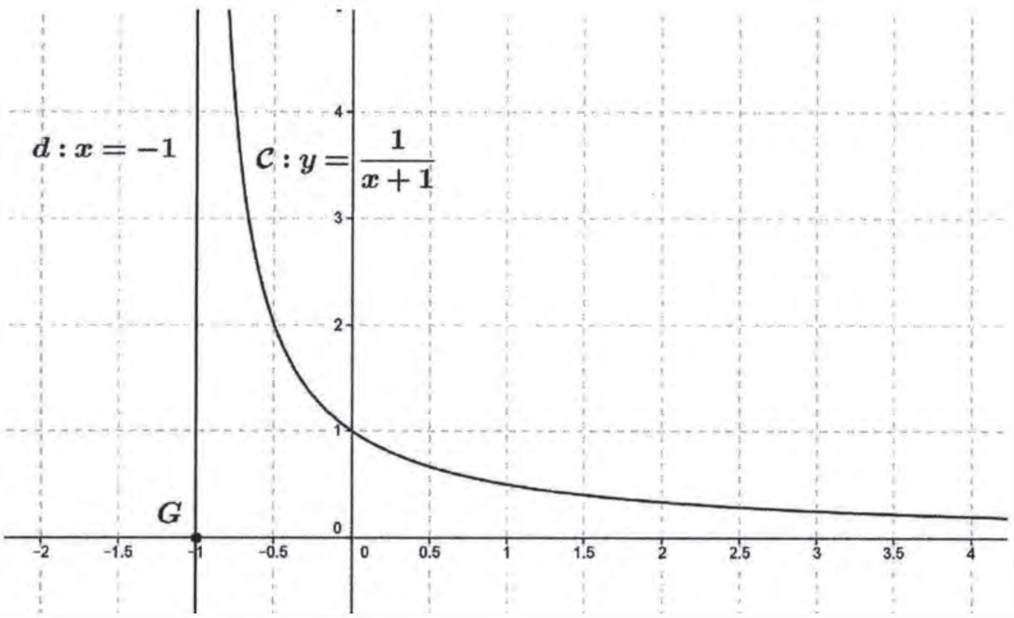
Questions pour le candidat :

1. Rédiger une correction de l'exercice proposé aux élèves en annexe 1.
2. Démontrer le rappel donné dans la question 1 sur la dérivée de la fonction exponentielle.
3. On s'intéresse à l'exercice proposé aux élèves.
   (a) En utilisant **l'annexe 2**, établir la liste des capacités et des connaissances évaluées dans la question 2 du document élève.
   (b) En utilisant les numéros des questions de l'exercice, renseigner en annexe 3, la colonne intitulée « questions » de la grille d'évaluation. **Attention : l'annexe 3 doit être rendue avec la copie**.
   (c) Proposer une modification de l'énoncé de la question 4 permettant la prise en compte des difficultés que peuvent rencontrer certains élèves.

Exercice 3

Cet exercice est construit autour de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Dans tout l'exercice, f désigne la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ **par** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, d la droite d'équation $x = -1$ et G le point de coordonnées $(-1, 0)$.



Partie A : Une propriété d'aire

1. **Étude d'un cas particulier :**
   (a) Écrire une équation cartésienne de T la tangente à C au point d'abscisse 1.
   (b) Déterminer les coordonnées de E et F points d'intersection respectifs de T avec l'axe (Ox) et la droite d.
   (c) Calculer l'aire du triangle EFG en unité d'aire.
2. **Étude du cas général :** Soit a est un nombre réel strictement supérieur à -1.
   (a) On note T_a la tangente à C au point d'abscisse a.
   Montrer qu'une équation de T_a est : $y = \dfrac{-1}{(1+a)^2}x + \dfrac{1+2a}{(1+a)^2}$.
   (b) Montrer que T_a rencontre l'axe (Ox) et la droite d puis déterminer les coordonnées de E_a (respectivement F_a) point d'intersection de T_a avec l'axe (Ox) (respectivement de T_a avec la droite d).

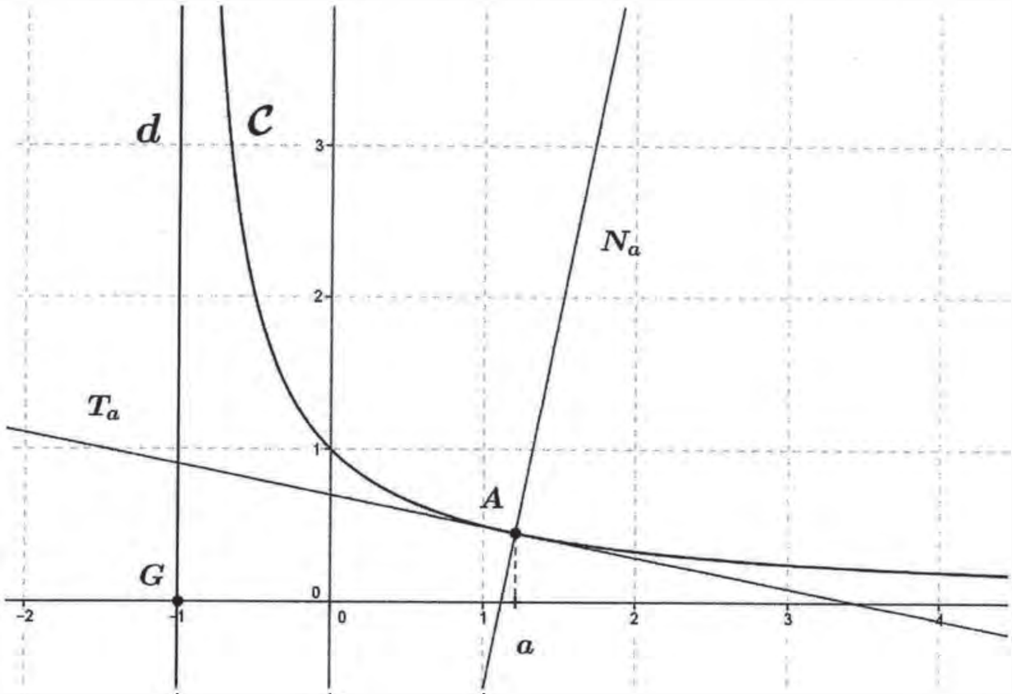
(c) Calculer l'aire du triangle E_aF_aG en unité d'aire. Que peut-on en conclure ?

Partie B : Une propriété géométrique de $\mathcal{C}$

1. **Étude d'un cas particulier** :
   (a) Soient M_0 et N_0 les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0 et 1. Écrire une équation cartésienne de la droite (M_0N_0).
   (b) Déterminer les coordonnées de L_0 et R_0 points d'intersection respectifs de (M_0N_0) avec l'axe (Ox), respectivement avec la droite d .
   (c) Montrer que les segments $[M_0N_0]$ et $[L_0R_0]$ ont même milieu qu'on notera I_0.
   (d) Quelle est la nature des triangles L_0I_0G et R_0I_0G ? Justifier.
2. **Étude du cas général** :
   (a) On note M et N deux points distincts quelconques de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives x_m et x_n. Écrire une équation cartésienne de la droite (MN).
   (b) On note L (respectivement R) le point d'intersection de (MN) avec l'axe (Ox) (respectivement avec la droite d) ; soit I le milieu de $[MN]$. Quelle est la nature des triangles LIG et RIG ? Justifier.

Partie C : Utilisation d'une normale

Soit $A(a, f(a))$ un point quelconque de $\mathcal{C}$ où a est un réel tel que $a > -1$.
On rappelle que la normale à $\mathcal{C}$ en A est la droite passant par A et orthogonale à la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point A . On note N_a la normale à $\mathcal{C}$ en A.
La figure suivante représente $\mathcal{C}$, A, T_a, N_a, d et G .



1. Montrer qu'une équation de N_a est : $y = (1+a)^2(x-a) + \dfrac{1}{1+a}$.
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles N_a passe par G ?
3. Dans cette question, on suppose que a est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que N_a et (Ox) ont un unique point d'intersection noté K_a.
   (b) Montrer que l'abscisse de K_a est strictement supérieure à -1.
   (c) Montrer que A, F_a, G et K_a sont situés sur un même cercle dont on déterminera les éléments caractéristiques. On rappelle que F_a est le point d'intersection de la tangente T_a avec d (voir partie A).

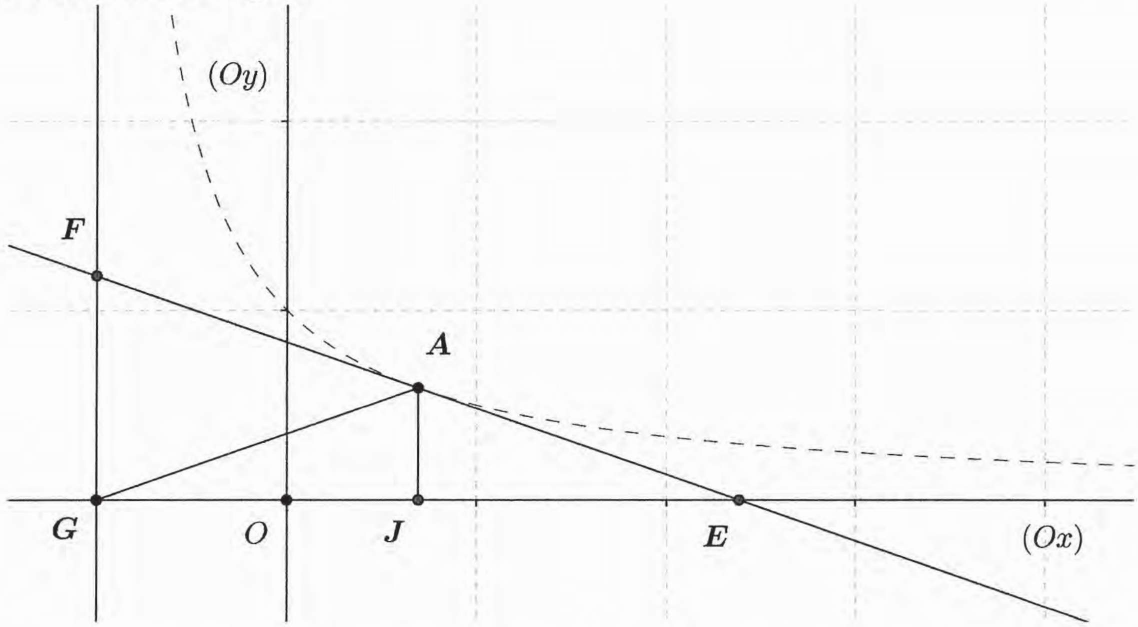
Partie D : Exercice de tir

1. On suppose que $a > -1$ et on considère $A(a, f(a))$ un point quelconque de $\mathcal{C}$. On rappelle que E_a est le point d'intersection de T_a avec (Ox) (voir partie A). **Pour alléger les notations dans cette partie, on notera E au lieu de E_a, F au lieu de F_a.**
   (a) Calculer les coordonnées du point J milieu de $[GE]$.
   (b) Quelle est la nature du triangle GAE ?
   (c) Calculer l'aire du triangle GAE.
   (d) En déduire **à l'aide de la partie B** que les triangles GAE et GAF ont la même aire.

Tournez la page S.V.P.

2. On fabrique une cible triangulaire FGE délimitée par les droites T_a, l'axe (Ox) et d. Cette cible est partagée en 3 en reliant G à A et A à J.

On tire une flèche en direction de la cible et on admet que la flèche atteint toujours la cible ainsi fabriquée.



On note p_{AFG} la probabilité d'atteindre l'intérieur du triangle AFG, p_{AJE} celle d'atteindre l'intérieur du triangle AJE et p_{AGJ} celle d'atteindre l'intérieur du triangle AGJ.

On établit un marquage de points selon la règle suivante :

Lors d'un lancer, atteindre l'intérieur du triangle AFG rapporte 1 point, atteindre l'intérieur du triangle AJE rapporte 1 point et atteindre l'intérieur du triangle AGJ rapporte 2 points. On considère qu'on peut toujours conclure et que la flèche n'est jamais sur une position limite.

Quand on lance plusieurs fois la flèche, les points obtenus à chaque lancer s'ajoutent.

Enfin, on suppose que les probabilités p_{AFG}, p_{AJE} et p_{AGJ} sont proportionnelles aux aires respectives des triangles AFG, AJE et AGJ.

(a) Calculer p_{AFG}, p_{AJE} et p_{AGJ}.

(b) On lance une fois la flèche. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 point ? Celle d'obtenir exactement 2 points ?

(c) On lance deux fois successivement une flèche sur la cible de manière indépendante.

   i. Faire un arbre de probabilité permettant de « visualiser » les différents cas possibles.

ii. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 points ? Celle d'obtenir exactement 3 points ? Celle d'obtenir exactement 4 points ?

(d) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 8 points en 4 lancers ?

Partie E : Partage d'une aire en 2

On considère P_1 la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, les axes (Ox) et (Oy) et la droite d'équation $x = 1$.

1. Calculer l'aire de P_1 en unité d'aire.
2. Soit d' la droite d'équation $y = bx$ où b est un nombre réel appartenant à $[\frac{1}{2}, +\infty[$. On admet que cette droite coupe $\mathcal{C}$ en $A(a, f(a))$ avec a dans $]0, 1]$. Déterminer une relation simple entre a et b.
3. On souhaite déterminer les positions de A telle que la droite d' partage l'aire de P_1 en deux aires égales.
   (a) Montrer que ce problème possède une solution si et seulement si a est solution de l'équation : $\quad 2\ln(1+a) - \dfrac{a}{1+a} - \ln 2 = 0$
   (b) Montrer que cette équation a une solution unique dans $]0, 1[$.
   (c) Donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

Partie F : Étude d'une suite

On rappelle que M_0 est le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(0, 1)$. On considère la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 et on appelle H_1 le point d'intersection de cette tangente avec l'axe (Ox). On note x_1 l'abscisse de H_1 et M_1 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_1.

H_1, M_1 et x_1 étant ainsi définis, on définit alors par récurrence, pour tout entier naturel n strictement positif :

- H_{n+1} le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_n avec l'axe (Ox) ;
- x_{n+1} l'abscisse de H_{n+1} ;
- M_{n+1} le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x_{n+1}.

1. Calculer x_1, x_2 et x_3. On pourra utiliser les résultats de la partie A-2.
2. Calculer les aires des triangles $M_0OH_1, M_1H_1H_2$ et $M_2H_2H_3$. Quelle conjecture peut on émettre sur l'aire du triangle $M_nH_nH_{n+1}$?

3. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

4. Démontrer la conjecture établie à la deuxième question.

5. Soit u la suite définie par $u_n = x_n + 1$, pour tout entier naturel $n > 0$.

   (a) Déterminer la nature de la suite, préciser sa raison et son premier terme.

   (b) Exprimer u_n puis x_n en fonction de n pour tout entier naturel $n > 0$.

6. Déterminer le plus petit entier naturel $n > 0$ tel que $x_n > 1000$.

FIN

ANNEXE 1 : Document élève

Niveau : Terminale Bac Pro - Groupement A

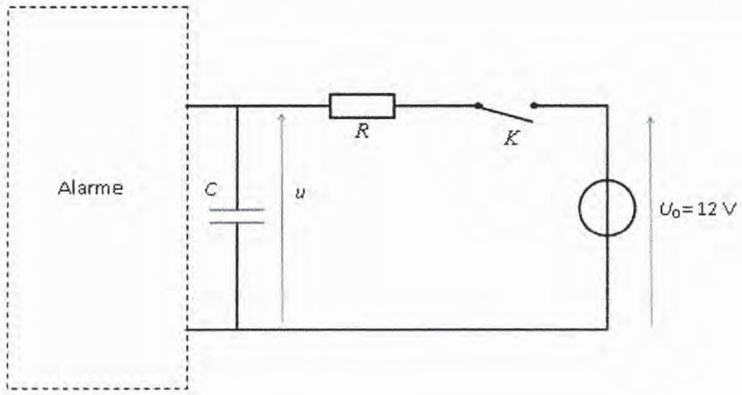
Thématique : Construire et aménager sa maison

Julien installe une alarme dans sa maison.

Il possède un schéma électrique de montage, et en particulier celui du circuit de commande.

À la fermeture de l'interrupteur K, l'alarme est mise sous tension.

La sirène de l'alarme se déclenche lorsque la tension aux bornes du condensateur atteint 10V.



Julien se pose alors la question suivante : « Combien de temps ai-je pour sortir de la maison avant le déclenchement de la sirène ? »

On ferme l'interrupteur à l'instant t = 0.

On note C la charge du condensateur et u la différence de potentiel à ses bornes lors de la charge.

u est donnée en fonction du temps, par la relation :

$$u(t) = 12(1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{60}t}) \qquad (t \text{ en seconde})$$

1. Déterminer, $u'(t)$ où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$, pour tout réel t, par $u(t) = 12(1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{60}t})$. On rappelle que $(\mathrm{e}^{at})' = a\mathrm{e}^{at}$.
2. (a) Donner le signe de $u'(t)$ sur $[0; 400]$. Justifier la réponse.

   (b) Établir le tableau de variation de la fonction u sur $[0; 400]$.
3. À l'aide de la calculatrice, donner un ordre de grandeur, à l'unité près, de la solution de l'équation $u(t) = 10$.

$Xmin = 0;\ Xmax = 400;\ pas = 40$
$Ymin = 0;\ Ymax = 14;\ pas = 1$
4. Résoudre l'équation $u(t) = 10$.
5. Répondre à la question de Julien.

EXTRAITS DU B.O.E.N spécial n°2 du 19 février 2009

Le programme de terminale professionnelle se compose d'un tronc commun (TC) et d'une partie spécifique (SPE) dont les contenus mathématiques sont indiqués dans le tableau suivant.

	Intitulé	Grpt A	Grpt B	Grpt C
TC	Statistique à deux variables. Probabilités.	x x	x x	x x
	Suites numériques 2.	x	x	x
	Fonction dérivée et étude des variations d'une fonction.	x	x	x
SPE	Fonctions exponentielles et logarithme décimal.			x
	Fonctions logarithmes et exponentielles.	x	x	
	Géométrie dans le plan et dans l'espace : consolidation.		x	
	Vecteurs 2.		x	
	Trigonométrie 2.	x		

2.2 Fonction dérivée et étude des variations d'une fonction *(groupements* A, B *et* C*)*

L'objectif de ce module est d'étudier les variations de fonctions dérivables afin de résoudre des problèmes issus des sciences, du domaine professionnel ou de la vie courante. L'utilisation des TIC est nécessaire.

Capacités	**Connaissances**	**Commentaires**
Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction.	Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle I. Fonctions dérivées des fonctions de référence $x \mapsto ax + b$ (a et b réels), $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^3$. Notation $f'(x)$. Dérivée du produit d'une fonction par une constante, de la somme de deux fonctions.	Étant donnée une fonction f dérivable sur un intervalle I, la fonction qui à tout nombre x de I associe le nombre dérivé de la fonction f en x est appelée fonction dérivée de la fonction f sur I et est notée f'. Dans les énoncés de problèmes ou d'exercices, les formules, admises, sont à choisir dans un formulaire spécifique donné en annexe. Appliquer ces formules à des exemples ne nécessitant aucune virtuosité de calcul. Les formules sont progressivement mises en œuvre pour déterminer les dérivées de fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Étudier, sur un intervalle donné, les variations d'une fonction à partir du calcul et de l'étude du signe de sa dérivée. Dresser son tableau de variation. Déterminer un extremum d'une fonction sur un intervalle donné à partir de son sens de variation.	Théorème liant, sur un intervalle, le signe de la dérivée d'une fonction au sens de variation de cette fonction.	Les théorèmes liant le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée sont admis. Le tableau de variation est un outil d'analyse, de réflexion voire de preuve. Constater, à l'aide de la fonction cube, que le seul fait que sa dérivée s'annule ne suffit pas pour conclure qu'une fonction possède un extremum.

2.4 Fonctions logarithmes et exponentielles *(groupements* A *et* B*)*

L'objectif de ce module est d'entraîner l'élève à étudier et exploiter ces fonctions, modèles de situations concrètes, et d'utiliser leurs propriétés algébriques. L'utilisation des TIC est nécessaire.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme népérien, sur un intervalle donné.	Fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$. Définition du nombre e. Propriétés opératoires de la fonction logarithme népérien.	La fonction ln est la fonction définie pour $x > 0$, qui s'annule en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse. L'étude des variations est conduite à l'aide de la dérivée. Ces propriétés sont conjecturées à l'aide de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ou à l'aide de la calculatrice. Toute virtuosité dans l'utilisation de ces propriétés opératoires est exclue.
Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal, sur un intervalle donné. Exploiter une droite tracée sur du papier semi-logarithmique	Fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$. Propriétés opératoires de la fonction logarithme décimal.	La fonction logarithme décimal est introduite à partir de la fonction ln. Les propriétés algébriques de cette fonction se déduisent de celles de la fonction logarithme népérien. Étudier des situations conduisant à l'utilisation du papier semi-logarithmique en liaison avec les sciences physiques ou le domaine professionnel.
Interpréter e^b comme la solution de l'équation $\ln x = b$. Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e^x$ sur un intervalle donné.	La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Propriétés opératoires de la fonction exponentielle de base e.	Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, que $\ln(e^b) = b$. L'unicité de la solution est montrée à l'aide de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto e^x$ est obtenue à l'aide des TIC. Ces propriétés sont conjecturées à l'aide de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ou à l'aide de la calculatrice.
Étudier les variations des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul).	Dérivée des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul).	Illustrer le cas a = 1 à l'aide des coefficients directeurs de quelques tangentes. Dans les énoncés de problèmes ou d'exercices, la formule, admise, est à choisir dans un formulaire spécifique donné en annexe. Les fonctions $x \mapsto q^x$ (avec q =10 et $q = \frac{1}{2}$) sont étudiées selon les besoins du domaine professionnel ou des autres disciplines.
Résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$). Résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec $a > 0$) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ (ou $\ln(ax) \leq b$) (avec $a > 0$).	Processus de résolution d'équations du type $e^{ax} = b$ et d'inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$). Processus de résolution d'équations du type $\ln(ax) = b$ (avec $a > 0$) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ ou du type $\ln(ax) \leq b$ (avec $a > 0$).	

ANNEXE 3

GRILLE NATIONALE D'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

1. Liste des capacités, connaissances et attitudes évaluées

Capacités	
Connaissances	
Attitudes	

2. Évaluation[1]

Compétences[2]	**Capacités**	**Questions**	**Appréciation du niveau d'acquisition[3]**
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information.		
Analyser Raisonner	Émettre une conjecture, une hypothèse. Proposer une méthode de résolution, un protocole expérimental.		
Réaliser	Choisir une méthode de résolution, un protocole expérimental. Exécuter une méthode de résolution, expérimenter, simuler.		
Valider	Contrôler la vraisemblance d'une conjecture, d'une hypothèse. Critiquer un résultat, argumenter.		
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit.		
			/ 10

[1] Des appels permettent de s'assurer de la compréhension du problème et d'évaluer le degré de maîtrise de capacités expérimentales et la communication orale. Il y en a au maximum 2 en mathématiques et 3 en sciences physiques et chimiques.

En mathématiques : L'évaluation des capacités expérimentales – émettre une conjecture, expérimenter, simuler, contrôler la vraisemblance d'une conjecture – se fait à travers la réalisation de tâches nécessitant l'utilisation des TIC (logiciel avec ordinateur ou calculatrice). Si cette évaluation est réalisée en seconde, première ou terminale professionnelle, 3 points sur 10 y sont consacrés.

En sciences physiques et chimiques : L'évaluation porte nécessairement sur des capacités expérimentales. 3 points sur 10 sont consacrés aux questions faisant appel à la compétence « Communiquer ».

[2] L'ordre de présentation ne correspond pas à un ordre de mobilisation des compétences. La compétence « Être autonome, Faire preuve d'initiative » est prise en compte au travers de l'ensemble des travaux réalisés. Les appels sont des moments privilégiés pour en apprécier le degré d'acquisition.

[3] Le professeur peut utiliser toute forme d'annotation lui permettant d'évaluer l'élève (le candidat) par compétences.